



چپا قراره بخونیم اینجا؟

1 بازه‌ها و اعمال روی آنها

2 اتحادها

3 توان و رادیکال

4 تابع و ضابطه‌اش

5 خط و سهمی

6 قدر مطلق

7 جز صحیح

8 رسم نمودار + انتقال

9 لگاریتم

۲

1 بازه‌ها و اعمال روی آنها بازه = زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی! انواعش:

بسته $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$

باز $\{x \in \mathbb{R} | x < 2\} = (-\infty, 2)$

نیم باز $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 0\} = (-3, 0]$

۳

EX $\llbracket \text{یا} \rrbracket$
 $(-1, 5] \cup [-3, 4) \equiv [-3, 5]$

EX $\llbracket \text{و} \rrbracket$
 $(-\infty, 5] \cap (0, 6) \equiv (0, 5]$

EX
 $(-1, 5] - [-3, 4) \equiv [4, 5]$

۴

2 اتحادها

1 مربع دو جمله ای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2 مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3 مکعب دو جمله ای $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4 پاق و لاغر $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

5 یک جمله مشترک $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

5

EX

$$x^2 \pm 2x + 1 = \quad x^2 \pm 6x + 9 = \quad 4x^2 \pm 4x + 1 =$$

EX

$$x^{16} - x^4 = \quad x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1 =$$

$$x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8 =$$

EX

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 4 = \quad x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

EX

$$x^2 - 9x + 14 = \quad x^2 + 8x + 15 =$$

$$x^2 + 9x - 22 =$$

$$x^2 - 5x - 24 =$$

6

3 توان و رادیکال

1 if $\sqrt[k]{\Delta} \Rightarrow \Delta \geq 0$ 2 $a^0 = 1, a \neq 0$ 3 $a^n \times a^m = a^{n+m}$

4 $a^n \times b^n = (ab)^n$ 5 $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$ 6 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

EX

if $27 \times 72 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \times 3^{m-1} \rightarrow m+n = ?$

7

7 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \rightarrow \left(\frac{1}{\Delta}\right)^n = \Delta^{-n}$ 8 $(a^n)^m = (a^{n \times m}) \neq a^{n^m}$

9 $\sqrt[n]{\Delta^m} = (\Delta)^{\frac{m}{n}}$ نزدیکات تاج
سرن 10

10 $\sqrt[m]{\sqrt[k]{\sqrt[A]{A}}} = nmk\sqrt[A]{A}$

EX

$$(2^2)^3 = \quad 2^{2^3} = \quad (16)^{0.75} =$$

$$\sqrt[3]{a^n \sqrt{a^n}} =$$

$$(\sqrt{2})^{-4} \times (2 - 2^{-2})^{-1} =$$

8

4 تابع و ضابطه اش

هر تابع، رابطه‌ای بین x و y را مشخص میکند (مث کارفونه) ضابطه‌ی تابع مدل ریاضی آن رابطه را نشان میدهد.

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

۹

T در تابع با ضابطه

$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

کنکور سراسری علوم تجربی داهل ۱۳۹۰

۹(۴) ۸(۳) ۷(۲) ۶(۱)

۱۰

5 خط و سهمی و حواشی آنها

تابع چند جمله‌ای توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می‌آیند

توانی مسای از ایکس به همش! ضریبش!

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$

درجه یک چند جمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه!

EX

$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 3 \xrightarrow{\text{درجه}} 5$ $f(x) = 2x^8 - 3x - \frac{1}{x} + 3 \xrightarrow{\text{درجه}} \text{نمی‌تواند}$

مهمترین توابع چند جمله‌ای خط (درجه ۱) و سهمی (درجه ۲) میباشند! اول برویم سراغ خط!

۱۱

شیب خط

نسبت اختلاف ارتفاع به فاصله‌ی طولی در هر دو نقطه دلفواه از خط می‌شود شیب خط!

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m > 0 \rightarrow$ صعودی
 $m = 0 \rightarrow$ ثابت
 $m < 0 \rightarrow$ نزولی

زاویه‌ای که خط با جهت + محور ایکس‌ها می‌سازد

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$

شیب در معادله‌ی صریح $y = mx + d$ ← ضریب ایکس = شیب

شیب در معادله‌ی ضمنی $ax + by + c = 0$ ← ضریب وای / ضریب ایکس = - شیب

۱۲

T شیب خطی که $(-4, 3), (6, 2k)$ را بهم وصل میکند برابر $\frac{k}{4}$ است. شیب $kx + y + 2 = 0$ کدام است؟ (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

A

۱۳

کافی است شیب خط و یک نقطه از آن را داشته باشیم!

نوشتن معادله خط

$m, A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$

T در مثلث ABC، با مختصات رئوس $A(2, -3), B(-2, 5), C(-4, 1)$ ، معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟ (۱) $y = 6x - 7$ (۲) $y = -6x + 7$ (۳) $y = -6x - 7$ (۴) $y = 6x + 7$

A

۱۴

خطوط افقی \rightarrow شیب خط $\rightarrow 0$ \rightarrow معادله خط $y = k$

خطوط قائم \rightarrow شیب خط $\rightarrow \infty$ \rightarrow معادله خط $x = t$

مثال: معادله خط افقی و قائمی که از نقطه $(-2, 5)$ می‌گذرد به ترتیب میشود: $y = 5$ & $x = -2$

رسم خط برای رسم خط به دو نقطه از آن نیاز داریم. بهترین راه این است که عرض از مبدا (x) را صفر می‌دهیم و طول از مبدا (y) را صفر می‌دهیم، را بدست می‌آوریم این دو نقطه را بهم وصل کنیم.

A

۱۵

T مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوط $y = x + 3, x = 4$ ، محور yها و نیمساز ناحیه اول کدام است؟ (۱) 8 (۲) 12 (۳) 14 (۴) 15

A

۱۶

تعیین علامت خط $y = ax + b$

X	$-\infty$	ریشه	$+\infty$
y	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

$y = -3x + 6$

$x = 2$

X	$-\infty$	2	$+\infty$
y	+	0	-

۱۷

T عبارت درجه اول $f(x) = 2kx + k^2 - 27$ به ازای $x < k$ مثبت و به ازای $x > k$ منفی است. k کدام است؟

(۱) $\{-3, 3\}$ فقط ۳
(۲) فقط -۳
(۳) فقط ۳
(۴) -۲

۱۸

همه چیز درباره ی تابع درجه ۲ ← $y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2$ ←

X	0	± 1	± 2
y	0	1	4

۱۹

سه می $y = ax^2 + bx + c$ و محور X ها

$\Delta > 0$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Delta = 0$

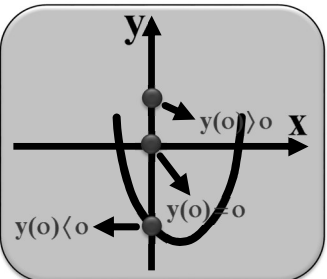
$y = a(x - x_1)^2$

$\Delta < 0$

تجزیه ناپذیر

۲۰

دو نقطه فوق مهم در سهمی



محل برخورد سهمی است با محور y ها!

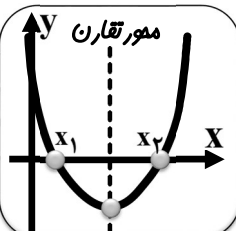
کافیه به جای x قرار بدی صفر! (همون c در فرم گسترده $y = ax^2 + bx + c$ یه $y = ax^2 + bx + c$ یه)

$y = -2x^2 + 5x + 6 \rightarrow y(0) = -2(0)^2 + 5(0) + 6 = 6$

$y = 2(x-1)^2 - 5x - 3 \rightarrow y(0) = 2(0-1)^2 - 5(0) - 3 = -1$

۲۱

۲ $y = ax^2 + bx + c$



نقطه‌ی روی قله ($a < 0$) یا قعر ($a > 0$) سهمی است.

طول آن $(x = -\frac{b}{2a})$ و عرض آن $(y = \frac{4ac - b^2}{4a})$ است.

EX $y = 4x^2 - 3(x + x^2) - 1 \rightarrow y = x^2 - 3x - 1 \rightarrow S(\frac{3}{2}, y(\frac{3}{2})) = (1/5, -3/25)$

EX $y = -3(2x - 4)^2 - 1 \rightarrow$

EX $y = 2(x-1)^2 - 1 + 4x \rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 1) - 1 + 4x \rightarrow y = 2x^2 + 1$

$S(0, y(0)) = (0, 1)$

۲۲

معادله درجه ۲ و روش‌های حلش $\leftarrow ax^2 + bx + c = 0$

روش ۱: تجزیه با دو اتحاد مربع مجموع دو جمله و یک جمله مشترک کارمان راه می‌افتد

EX $-3x^2 + 12x + 63 = -3(x^2 - 4x - 21) = -3(x-7)(x+3)$

EX $x^2 + 12x - 45 = 0 \Rightarrow x = ? \rightarrow (x+15)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-15 \end{cases}$

EX $-9x^2 + 6x - 1 =$

EX $x^2 + 73x + 210 =$

EX $4x^2 + 12x + 9 =$

۲۳

روش ۲: روش Δ با این روش هر معادله درجه ۲ ای قابل حل است!

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$ & $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ & $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ **دو ریشه** $\Delta > 0$

$x = \frac{-b}{2a}$ **یک ریشه مضاعف** $\Delta = 0$

$\alpha(x + \beta)^2 = 0$ **فاقد ریشه** $\Delta < 0$

$x = -\beta$

تعداد ریشه‌ها

۲۴

EX $2x^2 - x - 10 = 0$, $x = ? \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(-10) = 81$
 $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{1 \pm 9}{4} \rightarrow x = \frac{5}{2}$ or $x = -2$

EX $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $x = ? \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$
 $x = \frac{-(-4) \pm 0}{2(4)} \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow (2x-1)^2 = 0$

EX $2x^2 - x + 10 = 0$, $x = ? \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(10) = -79$

۲۵

روش میانبر Δ'

$b = 2b'$
 $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b'^2 - ac$ & $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a}$

تعداد ریشه‌ها $\Delta' < 0$ ← فاقد ریشه $\Delta' = 0$ ← ۱ $\Delta' > 0$ ← ۲

EX $7x^2 - 12x - 4 = 0$, $x = ? \rightarrow b' = \frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6$
 $\rightarrow \Delta' = (-6)^2 - (7)(-4) = 64 \rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{64}}{7} = \frac{6 \pm 8}{7} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{7} \end{cases}$

۲۶

تعیین علامت سهمی $y = ax^2 + bx + c$

$\Delta > 0$

X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y	a موافق	0	a مخالف	a موافق

$\Delta = 0$

X	$-\infty$	x_1	$+\infty$
y	a موافق	0	a موافق

$\Delta < 0$

X	$-\infty$	$+\infty$
y	a موافق	

۲۷

۱ $y = -x^2 + 3x + 4$
 $b = a + c \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow$

X	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
y	-	0	+	0	-

۲ $y = 4x^2 + 4x + 1$
 $\Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$

X	$-\infty$	-0.5	$+\infty$
y	+	0	+

۳ $y = -x^2 + x - 1$
 $\Delta = 0 \rightarrow$ فاقد ریشه

X	$-\infty$	$+\infty$
y	-	

۲۸

توجه

تعیین علامت $\frac{(ax+b)}{(cx+d)}$ شبیه تعیین علامت $(ax+b)(cx+d)$ است، فقط با این تفاوت که مخرجش نباید صفر شود. همین!

$$\frac{-x+2}{x+1} \geq 0 \xrightarrow{\text{a منفیه، پس بین دو ریشه است که مثبت!}} -1 < x \leq 2$$

$$\frac{2x-4}{x-3} \geq 0 \xrightarrow{\text{a مثبت، پس خارج دو ریشه است که مثبت!}} x > 3 \text{ یا } x \leq 2$$

$$\frac{x+3}{-3x+6} < 0 \xrightarrow{\text{a منفیه، پس خارج دو ریشه است که منفیه!}} x > 2 \text{ یا } x < -3$$

۲۹

T اگر مجموعه جواب نامعادله $-x^2+bx-c \geq 0$ به صورت $\{x: -3 \leq x \leq 1\}$ باشد، چند عدد صحیح در نابرابری $(1-b)x^2+3x+2c < 0$ صدق می کند؟ ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

A

۳۰

6 قدر مطلق | | قدر مطلق تابعی است مثبت کن!

$$|-3|=3 \quad |x^2+1|=x^2+1 \quad |x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



$$|x-1|= \quad |-2x+4|=$$

$$|-x^2+2x-1|= \quad |-x^2+x-2|=$$

$$|-x^2+5x-6|= \quad |-x^2+x-2|=$$

۳۱

برخی ویژگی های قدر مطلق $|A|^n = |A^n| = A^n$ $|A|=|B| \rightarrow A=\pm B$

$$|-A|=|A| \quad \left|\frac{A}{B}\right|=\frac{|A|}{|B|} \quad |AB|=|A||B| \quad |A \pm B| \neq |A| \pm |B|$$

۴ تفنگدار $a > 0$

۱ if $x^2 \geq a^2 \leftrightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$ ۲ if $x^2 \leq a^2 \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۳ if $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$ ۴ if $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۳۲

EX $|-2x+4|-2 \leq 0$

EX $16x^2-4 \geq 0$

EX $|-x^2-4|-4 \leq 0$

EX $|-x^2|+1 \geq 0$

۳۳

جز صحیح [] جز صحیح هر عدد می شه اولین عدد صحیح کوچکتر از خودش!

$[3/7]=3$



$[-3/3]=-4$



$[-6]=-6$ جز صحیح هر عدد صحیح می شود خودش!

$[\frac{1}{x^2+1}] = 0 \quad x \neq 0$

if $\sin x \neq 0$,
 $[1-\sin^2 x]=?$

۳۴

خروج از پراکت اعداد صحیح به حالت جمع و تفریق می توانند از جز صحیح خارج شوند!

if $k \in \mathbb{Z}$, then $[x \pm k] = [x] \pm k$

رکب نخوری! این قانون برای حالت ضربی صدق نمی کند!! $[nx] \neq n[x]$

if $[a]=[b]=m$, $[\frac{a+b}{2}+m]=?$ $m(4) \quad 2m(3) \quad \frac{m}{2}(2) \quad 0(1)$

۳۵

نکته هر عدد مانند x دارای یک جز صحیح $[x]$ است و یک جز اعشاری $(P_x \text{ or } \{x\})$

$x = [x] + P_x, 0 \leq P_x < 1$

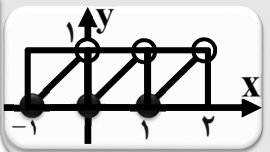
$0 \leq x - [x] < 1$

تعمیم هر چیزی منهای جز همیشه بین صفر و یک است! $0 \leq x - [x] < 1$

if $f(x) = 5[x] - 5x - 2$, $\max f(x) = ?$

۳۶

نمودار تابع $y = x - [x]$ مربع‌های یک‌دریک روی محور ایکس‌ها تصور کن اقطرهای موازی خط $y = x$ رو رسم کن! پایین توپر بالا توهالی!



تجربی ۸۳

$y = x - [x]; x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده، (n, L) ؟

۳۷

نکته وحشی

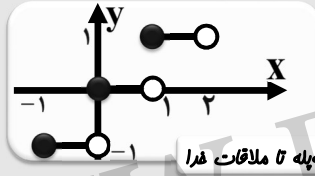
$P_x = 0 \iff x = [x] \iff x \in \mathbb{Z}$
 $0 < P_x < 1 \iff x \neq [x] \iff x \notin \mathbb{Z}$

اگر $x, y > 0$ و $x \in \mathbb{Z}, y \notin \mathbb{Z}$ داشته باشیم $[x - 3] + [y + 1] = [x] - 1$ مجموعه مقادیر ممکن y کدام است؟

۳۸

نمودار $[x]$ برای رسمش اول سعی کن با تعیین مقدار از شر جز صمیم خلاص شی!

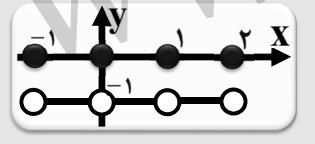
$y = [x] = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \end{cases}$ نمودارش



پله‌ها تا ملاقات خدا

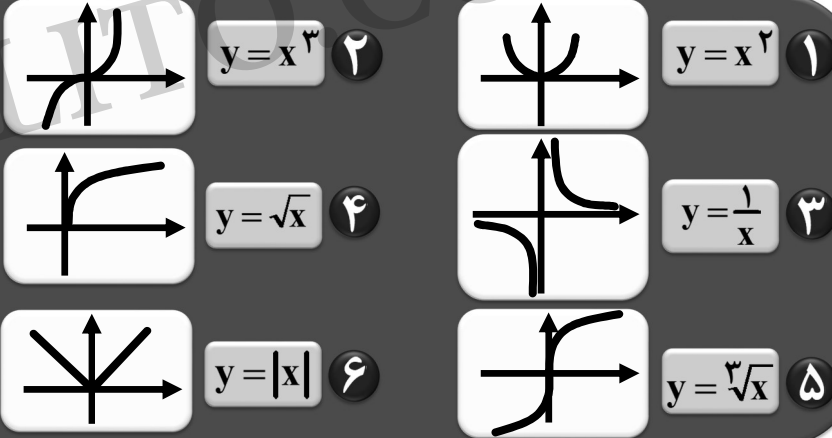
فیمس!

$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ نمودارش



۳۹

رسم نمودار + انتقال نمودارای معروف رو ببینید:



۱ $y = x^2$
 ۲ $y = x^3$
 ۳ $y = \frac{1}{x}$
 ۴ $y = \sqrt{x}$
 ۵ $y = \sqrt[3]{x}$
 ۶ $y = |x|$

۴۰

انتقال

بینیم با هر یک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد:

۸ $y = a^x$ $0 < a < 1$

۹ $y = a^x$ $a > 1$

۱۰ $y = \log_a x$ $0 < a < 1$

۱۱ $y = \log_a x$ $a > 1$

۱۲ $y = \cos x$ $x \in [0, 2\pi]$

۱۱ $y = \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$

۴۱

انتقال

بینیم با هر یک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد:

۱ $f(x) + k$

نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k روی محور y حرکت بده!

۲ $f(x + k)$

نمودار $f(x)$ را k واحد در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بده!

۴۲

۳ $|f(x)|$

جاهایی از نمودار که زیر محور x هاست را آینه‌وار بیار بالا! (قرینه نسبت به محور x ها)

۴۳

۴ $y = | \log_2 x |$

۵ $y = -(x-1)^2 - 1$

۶ $y = \sqrt{2-x} + 1$

۷ $y = (x-1)^3 + 1$

۸ $y = -\sqrt{2-2x}$

۹ $y = -|x^3| + 1$

۱۰ $y = -2^x + 1$

۴۴

۹ لگاریتم هر لگاریتمی به توان داره و هر توانی به لگاریتم: $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$

توجه هر وقت مبنای لگاریتم رو نداشتن یعنی مبنای ۱۰ هستش!

T اگر $\log_b a = 2$ و $a + b = 12$ باشد، در این صورت مقدار b کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

A

۴۵

۱ $\log_a 1 = 0$ ۲ $\log_a a = 1$ ۳ $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

۴ $\log \frac{x}{y} = \log_a^x - \log_a^y$ ۵ $\log \frac{x^m}{y^n} = \frac{m}{n} \log \frac{x}{y}$

$\log \frac{32}{16} =$

$\log \frac{\sqrt[3]{81}}{27} =$

$\log \frac{x^2 y}{\sqrt{x}} - \log \frac{y^2 x}{x} =$

۴۶

